

**Control 3** 10/6/2009

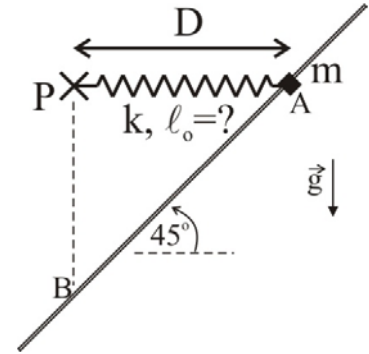
Tiempo: 3 Horas

FI2001 Mecánica, Semestre Otoño 2009

Profesor: Ricardo Muñoz M.

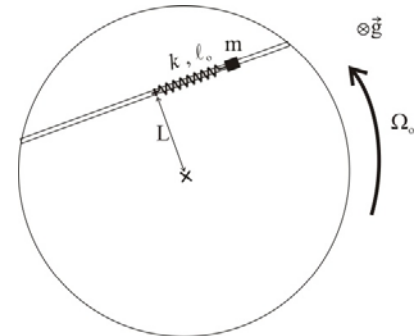
1. Una argolla de masa  $m$  se encuentra inserta sin roce en una barra inclinada  $45^\circ$  respecto de la horizontal. La argolla se encuentra ligada mediante un resorte ideal de constante elástica  $k$  y largo natural desconocido a un punto fijo P ubicado a una distancia horizontal  $D$  de la barra como muestra la figura.

- Determine el largo natural,  $\ell_0$ , del resorte si la posición A de la argolla (con el resorte horizontal) es un punto de equilibrio.
- ¿Qué condición se debe cumplir para que este equilibrio sea estable? Determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones en tal caso.
- Considere que se cumple la condición de b). Si la argolla es liberada desde el reposo en la posición B (con el resorte vertical), indique si la argolla asciende o desciende. Señale si existe algún punto de equilibrio adicional entre las posiciones A y B. Justifique claramente su respuesta.



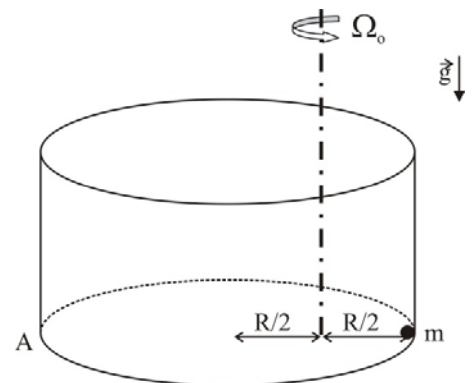
2. Considere una plataforma circular horizontal que gira con velocidad angular  $\Omega_0$  constante en torno a un eje vertical que pasa por su centro. Sobre la plataforma se encuentra una barra horizontal a lo largo de la cual puede deslizarse sin roce una argolla de masa  $m$  que está unida a un resorte de constante elástica  $k$  y largo natural  $\ell_0$ . La barra se encuentra a una distancia  $L$  del eje de rotación de la plataforma, y el resorte está fijo al punto medio de la barra como muestra la figura.

- Escriba la ecuación de movimiento para la posición de la argolla a lo largo de la barra. ¿Bajo qué condición el movimiento es oscilatorio?. En este caso determine la posición de equilibrio y la frecuencia de oscilaciones de la argolla en torno a él.
- Si se cumple la condición de a) y la argolla es liberada desde el reposo relativo a la barra y con el resorte en su largo natural, determine la magnitud de la máxima fuerza horizontal que la barra ejerce sobre la partícula en el movimiento resultante.



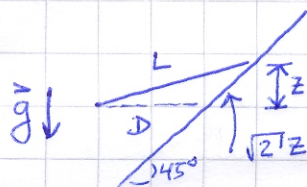
3. Un recipiente cilíndrico de radio  $R$  gira con velocidad angular constante  $\Omega_0$  alrededor de un eje vertical que se encuentra a una distancia  $R/2$  del eje del cilindro. Por el interior del cilindro una partícula de masa  $m$  se encuentra en reposo relativo a él en la posición indicada en la figura.

- Calcule la fuerza que la pared lateral del cilindro ejerce sobre la partícula en esa posición.
- Debido a una pequeña perturbación, la partícula empieza a deslizarse (roce nulo) a lo largo de la pared, en el mismo sentido de rotación del cilindro. Determine la rapidez relativa (al cilindro) y la rapidez absoluta de la partícula cuando ella alcanza la posición más alejada del eje de rotación (punto A).
- Indique si existe alguna posición de equilibrio estable y calcule la frecuencia de las pequeñas oscilaciones en torno de él.



$$m\vec{a}' = \vec{F}_{reales} - m\vec{a}_o - 2m\vec{\Omega}_e \times \vec{v}' - m\vec{\Omega}_e \times (\vec{\Omega}_e \times \vec{r}') - m\vec{\alpha}_e \times \vec{r}'$$

①



a)

$$V(z) = mgz + \frac{1}{2}k(L - l_0)^2 \quad (1)$$

$$V' = mg + k(L - l_0)L' \quad (2)$$

$$L^2 = D^2 + (\sqrt{2}z)^2 - 2D\sqrt{2}z \cos(180^\circ - 45^\circ)$$

$$L^2 = D^2 + 2z^2 + 2Dz \quad (3)$$

$$2LL' = 4z + 2D \rightarrow L' = \frac{2z + D}{L} \quad (4)$$

$$\text{equilibrium} \Rightarrow V'(z=0; L=D) = 0$$

$$\Rightarrow mg + k(D - l_0) \cdot 1 = 0 \Rightarrow \boxed{l_0 = D + \frac{mg}{k}} \quad (5)$$

b)

$$(2) \rightarrow V'' = kL'^2 + k(L - l_0)L''$$

$$(4) \rightarrow L'' = \frac{2L - (2z + D)L'}{L^2} \rightarrow L''(z=0; L=D) = \frac{1}{D}$$

$$V''(z=0; L=D) = k \cdot 1^2 + k(D - l_0) \frac{1}{D}$$

$$(5) \rightarrow V''_0 = k + k\left(-\frac{mg}{k}\right) \frac{1}{D}$$

(A)

2/2

$$\text{eq. estable} \Rightarrow V''_0 \geq 0$$

$$k - \frac{kmg}{kD} \geq 0 \Rightarrow \boxed{mg \leq kD}$$

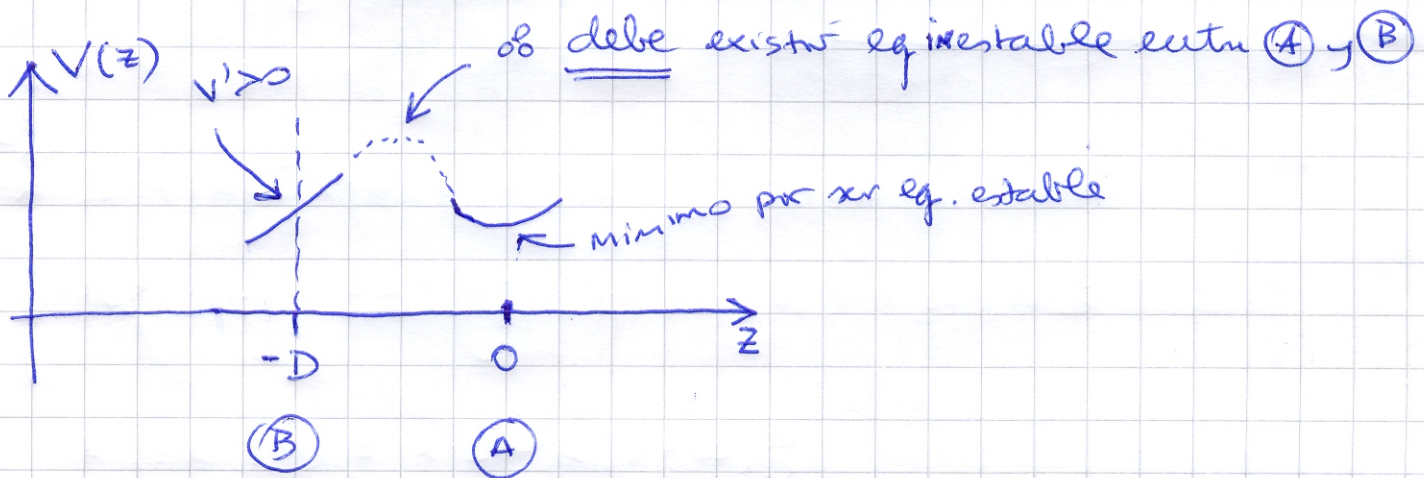
C)

$$V'(z = -D; L = D) = mg + k(D - l_0) L'_{(z = -D)}$$

$$(4) \Rightarrow L'(z = -D; L = D) = \frac{-2D + D}{D} = -1$$

$$\Rightarrow V'(z = -D; L = D) = mg + k\left(-\frac{mg}{k}\right)(-1) = 2mg$$

$$V' > 0 \Rightarrow \text{argolla } \underline{\text{desciende}}$$



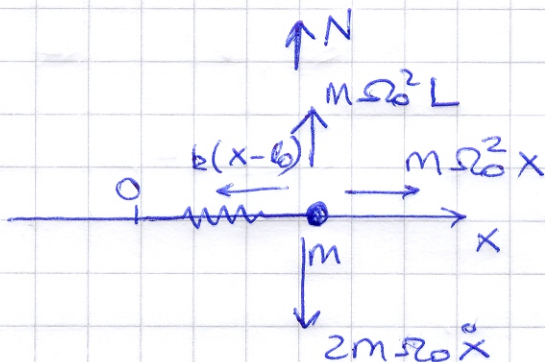


②

P2

1/3

a)



$$m\ddot{x} = -k(x-l_0) + m\Omega_0^2 x \quad (1)$$

$$m\ddot{x} = -[k - m\Omega_0^2]x + kl_0 \quad (2)$$

Oscillations  $\rightarrow$   $k - m\Omega_0^2 > 0$  (3)

frecuencia  $\omega_0^2 = \frac{k}{m} - \Omega_0^2$  (4)

equilibrio

$$0 = -(k - m\Omega_0^2)x_* + kl_0$$

$$\rightarrow x_* = \frac{kl_0}{k - m\Omega_0^2} \quad (5)$$

b)

$$\uparrow: 0 = N + m\Omega_0^2 L - 2m\Omega_0 \dot{x}$$

$$\Rightarrow N = 2m\Omega_0 \dot{x} - m\Omega_0^2 L \quad (6)$$

Como el movimiento es oscilatorio

$$|N|_{\max} = m\Omega_0^2 L + 2m\Omega_0 |\dot{x}|_{\max} \quad (7)$$

Falta encontrar  $|\dot{x}|_{\max}$ .

Con el cambio de variables  $\delta = x - x_*$  (2) queda:

$$\overset{\circ}{\delta} = -\omega_0^2 \delta \quad (8) \quad (\text{con } \omega_0^2 \text{ dado por (4)})$$

$$\rightarrow \delta = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t \quad (9)$$

cond. iniciales  $\delta(0) = -\delta_0 \quad \overset{\circ}{\delta}(0) = 0 \rightarrow A = 0 \quad B = -\delta_0$

$$\delta = -\delta_0 \cos \omega_0 t$$

$$\overset{\circ}{\delta} = \omega_0 \delta_0 \sin \omega_0 t$$

$$\Rightarrow |\dot{x}|_{\max} = \omega_0 \delta_0$$



12

3/3

$$\delta_0 = |x(0) - x_{\infty}| = \left| l_0 - \frac{k l_0}{k - m \Omega_0^2} \right|$$

$$\delta_0 = \frac{l_0 m \Omega_0^2}{k - m \Omega_0^2}$$

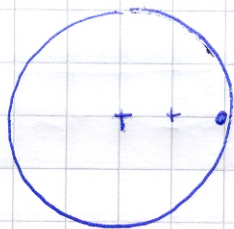
(7)  $\Rightarrow$

$$N_{\max} = m \Omega_0^2 L + 2 m \Omega_0 \left[ \frac{k}{m} - \Omega_0^2 \right]^{1/2} \frac{l_0 m \Omega_0^2}{(k - m \Omega_0^2)}$$

$$N_{\max} = m \Omega_0^2 L + \frac{2 \Omega_0^3 m l_0}{\sqrt{\frac{k}{m} - \Omega_0^2}}$$

③

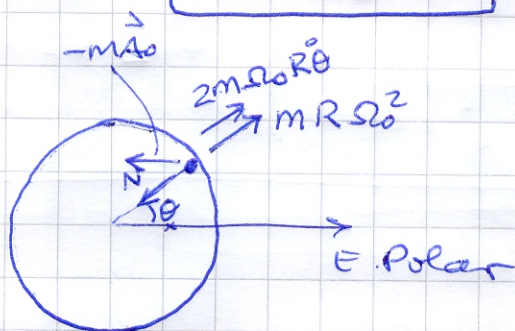
a)



mov. circular uniforme :

$$N = m \frac{R}{2} \Omega_0^2 \quad (1)$$

b)



$$\hat{I} = \cos\theta \hat{r} - \sin\theta \hat{\theta}$$

$$\vec{A}_0 = \frac{R}{2} \Omega_0^2 \hat{I}$$

$$-m\vec{A}_0 = -m \frac{R}{2} \Omega_0^2 (\cos\theta \hat{r} - \sin\theta \hat{\theta})$$

$$F_{\text{cor}} = 2m\Omega_0 R \dot{\theta} \hat{r}$$

$$F_y = mR\Omega_0^2 \hat{r}$$

$$F_r = 0$$

$$\vec{N} = -N \hat{r}$$



$$\hat{\theta} : m R \ddot{\theta} = m \frac{R}{Z} \Omega_0^2 \sin \theta \quad (2)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{Z} \Omega_0^2 \sin \theta$$

$$\int_0^{\dot{\theta}_f} \dot{\theta} d\dot{\theta} = \frac{1}{Z} \Omega_0^2 \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \frac{1}{Z} \Omega_0^2 \left[ -\cos \theta \right]_0^{\pi}$$

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}_f^2 = \Omega_0^2 \rightarrow \dot{\theta}_f^2 = 2 \Omega_0^2$$

$$\rightarrow \boxed{v_f' = \sqrt{2} \Omega_0 R}$$

$$\vec{v}_f = \vec{v}_0 + \vec{v}' + \vec{\Omega}_0 \times \vec{r}'$$

$$= \frac{R}{2} \Omega_0 \hat{\theta} + \sqrt{2} \Omega_0 R \hat{\theta} + \Omega_0 \hat{k} \times R \hat{r}$$

$$\vec{v}_f = \left[ \frac{1}{2} + \sqrt{2} + 1 \right] \Omega_0 R \hat{\theta}$$

$$\rightarrow \boxed{v_f = \left( \frac{3}{2} + \sqrt{2} \right) \Omega_0 R}$$



c)

$$(2) \rightarrow \ddot{\theta} = \frac{1}{2} \omega_0^2 \sin \theta$$

eq stable en  $\theta = \pi$

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{1}{2} \omega_0^2}$$